PROJET DOCTORAL

Titre: Application de la théorie des faisceaux à la géométrie symplectique

Directeur de thèse:

Stéphane Guillermou
Laboratoire Mathématiques Jean Leray
Université de Nantes
Stephane.Guillermou@univ-nantes.fr
https://www.math.sciences.univ-nantes.fr/fr/~/guillermou

Description du projet de thèse.

La théorie microlocale des faisceaux a été introduite par Kashiwara et Schapira à la fin des années 80 [2]. Entre autres choses elle permet de considérer un début de théorie de Morse pour les faisceaux. Un outil central dans la théorie est le microsupport des faisceaux, pour des faisceaux définis sur une variété M. Ce microsupport est un sous ensemble du cotangent de M qui indique si la restriction des sections d'un ouvert à un ouvert plus petit est ou non un isomorphisme: plus spécifiquement si ces ouverts sont des sous niveaux d'une fonction dont la différentielle ne rencontre pas le microsupport, la restriction est un isomorphisme. La théorie a été introduite en lien avec l'analyse microlocale et dans ce cadre le microsupport est un analogue de la variété caractéristique d'un système d'EDP.

Bien que le lien avec la géométrie symplectique ait été reconnu dès le début (le microsupport est un sous-ensemble coisotrope du cotangent), ce n'est qu'à partir des années 2010 que la théorie a été appliquée à des problèmes de topologie symplectique, après des travaux de Nadler-Zaslow [4] et Tamarkin [5]. Pour l'instant les liens sont surtout compris dans le cadre des cotangents de variétés, mais des travaux récents de Nadler-Shende [3] donnent une construction d'une catégorie de type Fukaya à partir de catégories de faisceaux, pour des variétés de Weinstein. Il serait très utile de comprendre un peu plus explicitement ces catégories, même dans des cas simples, à commencer par des surfaces, ou des plombages. Dans une autre direction, les faisceaux sont très adaptés aux problèmes de géométrie symplectique C^0 et il serait bien d'étudier plus systématiquement le passage à la limite C^0.

Voici quelques problèmes à étudier dans ce projet de thèse.

Date: 11 mars 2024.

- Dans un travail récent avec Claude Viterbo [1] nous utilisons des limites de faisceaux constructibles. Il serait intéressant de vérifier que ces limites forment une catégorie indépendante du choix d'une structure analytique sur la variété. Il faudrait aussi étudier quelles opérations de faisceaux agissent sur cette catégorie. Peut-on associer à toute isotopie hamiltonienne C^0 un faisceau, comme on sait le faire pour des isotopies hamiltoniennes lisses?
- On sait associer un faisceau à une isotopie de contact du fibré en sphères d'un cotangent. Plus généralement on doit pouvoir le faire pour un symplectomorphisme mais ceci mériterait d'être étudié soigneusement. On peut aussi essayer de généraliser à un symplectomorphisme entre deux ouverts U et V d'un cotangent: dans quels cas peut-on construire un faisceau qui induit une équivalence entre les catégories localisées associées à U et V?
- Dans le cas d'une surface à bord, la catégorie de Nadler-Shende mentionnée ci-dessus doit être relativement simple. Peut-on en donner une description combinatoire? Dans le cas d'un plombage de deux cotangents, peut-on la décrire raisonnablement à partir des catégories de faisceaux sur les deux bases correspondantes?

Références

[1] S. Guillermou and C. Viterbo, *The singular support of sheaves is γ-coisotropic*, (2023) `arXiv:2203.12977`.

[2] M. Kashiwara and P. Schapira, *Sheaves on Manifolds,* Grundlehren der Math. Wiss. **292** Springer-Verlag (1990).

[3] D. Nadler and V. Shende, *Sheaf quantization in Weinstein symplectic manifolds*, (2020) `arXiv:2007.10154`.

[4] D. Nadler and E. Zaslow, *Constructible sheaves and the Fukaya category,* J. Amer. Math. Soc. **22** 233–286 (2009).

[5] D. Tamarkin, *Microlocal conditions for non-displaceability,* in Algebraic and analytic microlocal analysis, edited by M. Hitrik et al., Springer Proceedings in Mathematics and Statistics **269**, 99–223 (2018) `arXiv:0809.1584`.