

SUJET DE THESE

Les inégalités à la Severi, géométrie de surfaces irregulières de type général - approches cohomologique et catégorique

Igor Reider

April 7, 2024

§ 0 Introduction

Le sujet de thèse se situe dans le domaine de la géométrie algébrique. Plus précisément dans la théorie de surfaces de type général. Les surfaces en questions sont les variétés complexes de dimension complexe deux. En plus, on peut les réaliser comme sous-variétés fermées dans un espace projective, ce que implique que ils sont compact et décrites par un systèmes d'équations polynômiales. Cela donne la richesse de ces objets: d'un côté ceux sont des objets topologiques, d'autre - algébriques.

Notons par X notre surface. Du côté topologique, ou plutôt topologie algébrique, on associe à X les groupes de cohomologie singulière

$$H^*(X, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=0}^4 H^i(X, \mathbb{Z})$$

Les rangs de ces groupes, noté b_i , les nombres de Betti de X , nous donnent tout de suite plusieurs invariants numeriques:

$$b_1(X) = \text{rg}(H^1(X, \mathbb{Z})), b_2 = \text{rg}(H^2(X, \mathbb{Z})).$$

Le fait que X est une variété *complexe et projective* donne plus de structure à la cohomologie singulière de X . L'algèbre cohomologique aux coefficients *complexes*

$$H^*(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{i=0}^4 H^i(X, \mathbb{C})$$

est bi-graduée. C'est-à-dire, chaque composante $H^i(X, \mathbb{C})$ s'écrit en somme directe

$$H^i(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p=0}^i H^{p, i-p}(X).$$

C'est la profondissime décomposition de Hodge. Les composantes $H^{p,q}(X)$ s'appelle groupes de Hodge de X . Ils sont sujet à la symétrie

$$H^{q,p}(X) = \overline{H^{p,q}(X)},$$

où à droite, $\overline{H^{p,q}}(X)$, c'est la cojugaison complexe de $H^{p,q}(X)$.

Les deux groupes qui nous interessent $H^1(X, \mathbf{C})$ et $H^2(X, \mathbf{C})$ ont la décomposition de Hodge suivante

$$\begin{aligned} H^1(X, \mathbf{C}) &= H^{1,0}(X) \oplus H^{0,1}(X), \\ H^2(X, \mathbf{C}) &= H^{2,0}(X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X). \end{aligned}$$

Les dimensions de groupes de Hodge sont notées par $h^{p,q}(X)$ et on les appellent les nombres de Hodge de X . Le nombre $h^{1,0}(X) = h^{0,1}(X)$ s'appelle *l'irrégularité* de X et $h^{2,0}(X) = h^{0,2}(X)$ le *genre géométrique* de X et on les designe par $q(X)$ et $p_g(X)$ respectivement. La decomposition de Hodge et sa symétrie nous donne

$$b_1(X) = 2q(X), \quad b_2(X) = 2p_g(X) + h^{1,1}(X)$$

Les deux invariants $q(X)$ et $p_g(X)$ sont réunis dans l'expression

$$\chi(X) := 1 - q(X) + p_g(X)$$

qui s'appelle *la caractéristique holomorphe d'Euler* de X .

Les surfaces *irrégulières* dans le titre du sujet de thèse signifie que les surfaces en question ont $q(X)$ non-nul. Le sens de géométrie complexe de $H^{1,0}(X)$ est suivante

$$H^{1,0}(X) := \text{l'espace des formes holomorphes globales de degré 1 sur } X.$$

En intégrant une forme de degré 1 le long un chemin continue par morceaux ou une chaine de simplexes de dimension 1 sur X on obtient un nombre. Ainsi on obtient l'application de X dans le tore complexe de dimension $q(X)$

$$X \longrightarrow (H^{1,0})^* / H_1(X, \mathbb{Z}).$$

Cette application s'appelle *l'application d'Albanese* de X . C'est un analogue de l'application de Abel-Jacobi dans la théorie de courbes algébrique et elle joue le rôle essentiel dans notre connaissance de la géométrie de courbes. La situation dans la théorie de surfaces est très différente: on connaît très peu d'choses sur cette application! D'une certaine manière le problématique de la thèse est lié à la compréhension de l'application de l'Albanese de X .

Si l'application d'Albanese de X n'est pas comprise, sa linéarisation, c'est-à-dire, la différentielle, est assez simple: sa duale nous donne l'application entre le fibré trivial $H^{1,0}(X) \times X$ et le fibré *cotangent* Ω_X . En langage de faisceaux cela s'écrit en morphisme

$$H^{1,0}(X) \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega_X.$$

Le faisceaux ou fibré cotangent Ω_X sera un des objets principeaux de la thèse. C'est le faisceaux de germes de forme holomorphes de degré 1. Donc l'espace de ses sections globales est précisément le groupe de Hodge $H^{1,0}(X)$. Le faisceau cotangent est du rang 2 et sa puissance extérieure de degré 2, est le faisceau de rang 1. On l'appelle le faisceau ou fibré *canonique* de X et le designe par $\mathcal{O}_X(K_X)$, où K_X est la classe du diviseur canonique de X . En symboles cela donne

$$\wedge^2 \Omega_X = \mathcal{O}_X(K_X).$$

Ainsi le faisceau canonique est le faisceau de germes de formes holomorphes de degré 2 et donc l'espace de ses sections globales est le groupe de Hodge $H^{2,0}(X)$:

$$H^{2,0}(X) = H^0(\wedge^2 \Omega_X) = H^0(\mathcal{O}_X(K_X)).$$

Le diviseur canonique, selon ses propriétés, divise le monde des surfaces en types. Les surfaces dites de *type général* sont celles pour lesquelles une certaine puissance positive de $\mathcal{O}_X(K_X)$ donne (presque) un plongement de X dans un espace projectif. Ainsi K_X et ses multiples nous fournissent des courbes sur X . L'intersection entre ces courbes donne le degré du (presque)plongement. En particulier, on a la valeur K_X^2 , l'auto-intersection du diviseur canonique. La paire de nombres

$$(K_X^2, \chi(X))$$

s'appelle les nombres de Chern de X . Malgré leurs apparences ces invariants sont *purement topologiques!*

On se rend compte que le faisceau cotangent est 'responsable' de deux groupes de Hodge $H^{1,0}(X)$ et $H^{2,0}(X)$ et en plus il établit le lien entre les deux: le produit extérieur de deux 1-formes est une 2-forme! Autrement dit nous avons l'application

$$\wedge^2 H^{1,0}(X) = \wedge^2 H^0(\Omega_X) \longrightarrow H^0(\wedge^2 \Omega_X) = H^0(\mathcal{O}_X(K_X)) = H^{2,0}(X).$$

Le fait que les propriétés de cette application est liées à la *géométrie* de X ramonte au début du 20-ième siècle. Le théorème de Castelnuovo - De Franchis dit que si le noyau de l'application contient un élément décomposable, c'est-à-dire, un élément de la forme $\omega \wedge \omega'$, pour deux 1-formes holomorphes ω et ω' qui sont linéairement indépendantes, alors X admet un morphisme surjectif

$$X \longrightarrow C$$

sur une courbe projective lisse C et les deux 1-formes en question proviennent de C . En 1932 Federico Severi a annoncé que toute surface X avec les nombres de Chern $(K_X^2, \chi(X))$ sujet à l'inégalité

$$K_X^2 < 4\chi(X)$$

a l'image de l'application de Albanese de dimension au plus 1. C'est un résultat remarquable, car il décrit l'application d'Albanese sous une hypothèse très simple sur les invariants topologiques de X . Pour l'histoire, l'argument de Severi était faux et il fallait attendre Rita Pardini qui en 2004 a démontré ce résultat.

Une des conséquences du théorème de Pardini est que une surface de type général avec l'image de l'application d'Albanese de dimension 2 a les nombres de Chern sujet à l'inégalité

$$K_X^2 \geq 4\chi(X).$$

En hommage à Severi cette inégalité porte son nom. L'esprit de cette inégalité est suivant: les propriétés de 1-formes holomorphes sur X imposent des restrictions sur les nombres de Chern de notre surface.

Maintenant j'ai expliqué tous les termes du titre de la thèse, il est temps d'expliquer les problèmes de recherche et l'approche cohomologique et catégorique.

§ 1 Problèmes de la thèse et l'approche

L'esprit d'inégalités de type de Severi s'est d'établir des liens entre trois aspects d'une surface irrégulière X de type général:

- les propriétés de formes holomorphes de degré 1 sur X ,
- la géométrie de X ,
- les restrictions sur les nombres de Chern $(K_X^2, \chi(X))$.

Les 1-formes holomorphes forment l'espace $H^{1,0}(X)$. Cet espace est l'espace de sections globales du faisceau cotangent Ω_X . Le passage

$$H^{1,0}(X) \rightsquigarrow (\Omega_X, H^0(\Omega_X))$$

est une forme embryonnaire de l'approche catégorico-cohomologique: on élève le groupe de Hodge $H^{1,0}(X)$ au faisceau Ω_X , un objet de la catégorie de \mathcal{O}_X -modules cohérents et sa cohomologie de degré zéro, l'espace $H^0(\Omega_X)$ de sections globales.

Le théorème de Rita Pardini peut être reformulé en termes du couple $(\Omega_X, H^0(\Omega_X))$:

$$\Omega_X \text{ est génériquement engendré par ses sections globales} \Rightarrow K_X^2 \geq 4\chi(X).$$

L'hypothèse à gauche signifie que le morphisme

$$a_X : H^0(\Omega_X) \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega_X,$$

la codifférentielle de l'application d'Albanese rencontrée dans l'introduction, a le conoyau ayant le support en codimension au moins 1. Ainsi l'approche catégorico-cohomologique maintenant est étendue aux morphismes dans la catégorie de \mathcal{O}_X -modules.

Encore un exemple: supposons que l'irrégularité $q(X) \geq 3$ et le support de $\text{coker}(a_X)$ est en codimension au moins 2; alors on sait de montrer que l'inégalité de Severi s'améliore

$$K_X^2 \geq 6\chi(X).$$

C'est ce genre de phénomènes que je propose d'étudier dans la thèse.

Problème 1. Etudier les liens entre les propriétés du morphisme

$$a_X : H^0(\Omega_X) \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega_X$$

et la géométrie de X ; en déduire des inégalités à la Severi.

Nous avons deux façons de continuer la recherche. La première est de passer de la version linéaire de l'application d'Albanese aux versions de l'ordre supérieur et la deuxième est d'étendre notre approche catégorico-cohomologique à la cohomologie supérieure.

Je commence avec la première. Cela signifie qu'on remplace l'étude du morphisme a_X par ses puissances. Nous avons les choix ici: soit prendre la puissance symétrique, soit anti-symétrique. Le premier donne les morphismes

$$a_X^{(n)} : \text{Sym}^n(H^0(\Omega_X)) \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow \text{Sym}^n \Omega_X,$$

pour chaque entier $n \geq 2$.

Probleme 2. Etudier les liens entre les propriétés du morphisme

$$a_X^{(n)} : \text{Sym}^n(H^0(\Omega_X)) \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow \text{Sym}^n \Omega_X,$$

pour chaque entier $n \geq 2$, et la géométrie de X ; en déduire des inégalité à la Severi de l'ordre 'supérieur'.

Il faut souligner que pour $n \geq 2$ on s'intéresse pas seulement au conoyau de $a_X^{(n)}$, comme on a vu au cas $n = 1$, mais aussi à son noyau et, en particulier, les sections globales du noyau, car cela nous donne des équations décrivant une certaine variété étroitement liée à notre surface. Je désigne cette variété par P_X . On fera un énorme pas en avant dans le sujet, si on comprend le cas $n = 2$.

Probleme 3. Etudier les liens entre les propriétés du morphisme

$$a_X^{(2)} : \text{Sym}^2(H^0(\Omega_X)) \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow \text{Sym}^2 \Omega_X$$

et la géométrie de X ; en déduire des inégalité à la Severi 'quadratique'.

Dans ce cas les sections globales du noyau nous donnent les équations de degré 2 ou les quadriques passant par P_X . Pour décrire notre ignorance dans le sujet il suffit de dire que on ne sait pas s'il existe une surface X pour laquelle P_X est une quadrique!

Probleme 4. Existe-t-il une surface irrégulière du type générale avec P_X une quadrique lisse dans \mathbb{P}^4 ?

Un exemple de X ayant P_X de degré 3, une cubique dans \mathbb{P}^4 est célèbre. Il a été étudié par Clemence et Griffiths dans les années 1970 – 74. A part de la beauté intrinsèque de cette surfaces, l'exemple a permis des avancées majeures dans les questions de la géométrie complexe, variation de structures de Hodge, problèmes de l'espaces de modules, théorème de Torelli et encore autres sujets importants de la géométrie algébrique. Et les variétés de degré 3, cette fois dans \mathbb{P}^5 , continue susciter beaucoup d'intérêt dans la recherche actuelle. Donc la résolution de **Probleme 4** sera un résultat formidable pour la thèse.

Passons au cas anti-symétrique. Cela veut dire que on considère le produit extérieur de a_X :

$$\wedge^2 a_X : \wedge^2(H^0(\Omega_X)) \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow \wedge^2 \Omega_X.$$

Probleme 5. Etudier les liens entre les propriétés du morphisme

$$\wedge^2 a_X : \wedge^2(H^0(\Omega_X)) \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow \wedge^2 \Omega_X$$

et la géométrie de X ; en déduire des inégalité à la Severi 'symplectique'.

Encore, on étudiera le conoyau ainsi que le noyau et, en particulier, les sections globales du dernier. Observons qu'avoir une section globale décomposable dans le noyau c'est le théorème de Castelnuovo - de Franchis. Donc le problème porte sur la généralisation de ce résultat classique!

Nous allons passer maintenant à la deuxième façon de généraliser notre approche catégorico-cohomologique. Il s'agit de remplacer notre passage

$$H^{1,0}(X) \rightsquigarrow (\Omega_X, H^0(\Omega_X))$$

par le(s) groupe(s) de cohomologie supérieures. Par exemple, mettons à la place de $(\Omega_X, H^0(\Omega_X))$ le couple

$$(\Theta_X, H^1(\Theta_X))$$

où Θ_X est le fibré *tangent* holomorphe de X . Le fibré tangent est le dual de Ω_X . Donc la flèche

$$H^{1,0}(X) \rightsquigarrow (\Theta_X, H^1(\Theta_X))$$

garde l'esprit de 'linéarisation' de l'application de l'Albanese. Mais en mettant le groupe $H^1(\Theta_X)$ il semble que on a perdu la géométrie. C'est précisément l'essentiel du problème suivant.

Problème 6. Etudier la géométrie du passage

$$H^{1,0}(X) \rightsquigarrow (\Theta_X, H^1(\Theta_X)).$$

Ce passage a pour but d'étudier des liens entre la géométrie de X d'un côté et la variation de structure de Hodge de $H^1(X, \mathbf{C})$ et $H^2(X, \mathbf{C})$ ainsi que les applications de périodes associées aux ces variations. L'idée principale est basée sur l'identification naturelle entre le groupe de cohomologie $H^1(\Theta_X)$ et le groupe d'extensions

$$H^1(\Theta_X) \cong Ext^1(\Omega_X, \mathcal{O}_X).$$

Autrement, dit on réalise une classe de cohomologie $\xi \in H^1(\Theta_X)$ comme une suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{T}_\xi \longrightarrow \Omega_X \longrightarrow 0.$$

Ainsi on est dans la catégorie de suites exactes de \mathcal{O}_X -modules. L'intérêt de cet approche est que les trois groupes de cohomologie

$$H^{1,0}(X) = H^0(\Omega_X), H^{0,1}(X) = H^1(\mathcal{O}_X), H^1(\Theta_X)$$

se trouvent réunis dans la suite de cohomologies de la suite exacte de ξ . Et ils sont réunis précisément par le cup-produit

$$H^1(\Theta_X) \longrightarrow Hom(H^{1,0}(X), H^{0,1}(X))$$

qui est la différentielle de l'application de période associée à la variation de structures de Hodge sur $H^1(X, \mathbf{C})$. En plus, on retrouve la géométrie dans le couple

$$(H^0(\mathcal{T}_\xi), \mathcal{T}_\xi).$$

Le sujet proposé est assez vast et flexible. Il porte à la fois sur la géométrie algébrique classique, comme la théorie de surfaces, les courbes sur une surface, et la recherche actuelle - l'idée de catégorification, catégorie de faisceaux, catégories dérivées. Une personne qui choisira le sujet doit savoir des bases de la topologie algébrique, géométrie algébrique ou/et géométrie différentielle complexe; elle va acquérir la connaissance de la théorie des surfaces complexes, des faisceaux, les invariants de Chern, la théorie de cohomologie de faisceaux; des fondamentaux sur les catégories, catégories dérivées de faisceaux, les catégories triangulées. Pour l'aspect de résultats originaux de la thèse, on pourrait concentrer la recherche sur un ou plusieurs problèmes formulés ci-dessus.

Le travail de thèse sera effectué au Laboratoire Angevin de Recherche (LAREMA), à Angers, pendant 3 ans. L'acquisition des connaissances décrites ci-dessus, selon le niveau d'une candidate, se fera pendant les premiers 12-18 mois; le reste du temps sera consacré à la recherche sur le(s) problème(s) choisi(s) et la rédaction de la thèse.

References

- [G-H] Griffiths, Ph., Harris, J., Principles of algebraic geometry, New-York, Wiley, 1978.
- [G-S] Griffiths, Ph., Schmid, W., Recent development in Hodge theory: a discussion of techniques and results. In: Discrete subgroups of Lie groups and applications to moduli. Intern.Colloq., Bombay, 1973, Oxford Univ.Press, Bombay, 1975, 31-127.
- [V] Voisin, C., Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe, Cours Spécialisés, Collection SMF, 10, 2002.

Reider Igor
L'Université d'Angers
2, boulevard Lavoisier
49045 Angers Cedex 01
France
E-mail: reider@univ-angers.fr