Sujet de Thèse :

Théorème de compacité conforme pour la **Q***-courbure.*

Proposé par G. Carron et Paul Laurain

La **Q**-courbure d'une variété riemannienne (M,g) est une fonction dont l'expression se calcule à l'aide du jet d'ordre 4 de la métrique :

$$\mathbf{Q}_g = a_n \Delta_g \mathrm{scal}_g + b_n \mathrm{scal}_g^2 + c_n \|\mathrm{Ric}_g\|^2,$$

où a_n, b_n et c_n sont des constantes ne dépendant que de $n = \dim M$. En dimension différente de 4, l'expression de la **Q**-courbure d'une métrique conforme $\hat{g} = u^{\frac{4}{n-4}} g$ est donnée par :

$$\mathbf{Q}_{\hat{g}}\, u^{\frac{n+4}{n-4}} = P_g(u).$$

où P_g est un opérateur différentiel d'ordre 4, symétrique et à symbole principal scalaire, l'opérateur P_g est nommé opérateur de Paneitz. Cette formule de changement conforme est analogue à celle régissant la courbure scalaire d'une métrique conforme à partir de l'opérateur de Yamabe. Cependant l'étude de **Q**-courbure dans une classe conforme est beaucoup plus difficile que celui de la courbure scalaire car d'une part l'expression de P_g est beaucoup plus compliquée que celle de l'opérateur de Yamabe et d'autre part l'opérateur P_g étant d'ordre 4, il ne vérifie pas de principe du maximum. Cependant récemment le travail de M. Gursky et A. Machioldi [8] ont permis de lever la plupart des obstacles dans le cas d'une classe conforme portant une métrique à courbure scalaire positive et à **Q**-courbure positive et leur résultat permet d'y trouver une métrique à **Q**-courbure constante positive. Ceci a été ensuite complété par d'autres travaux [7, 9] qui ouvrent de nouvelles perspectives de recherche.

Métrique à Q-courbure constante en présence de singularités coniques. On sait que sur une variété riemannienne compacte, on peut trouver une métrique conforme à courbure scalaire constante. Les travaux de M. Gursky et A. Machioldi ont permis de répondre, partiellement à la question de l'existence d'une métrique conforme à **Q**-courbure constante. Si on considère une variété riemannienne dont la completion comprend juste un nombre fini de singularités coniques l'existence d'une métrique conforme à courbure scalaire constante a été abordée par K. Akutagawa et B. Botvinnik [1] et complétée par [2]. L'idée sous-jacente à ce dernier travail est que les techniques utilisées par Gursky [6] sont assez flexible pour être exportées dans ce cadre. On veut donc dégager une classe de métriques conformes présentant des singularités coniques possédant une métrique à **Q**-courbure constante. Dans le cas sans singularité, l'obtention d'un théorème de masse positive d'ordre 4 est un point clé important de la preuve. Il existe plusieurs travaux où un tel résultat est démontré [3, 10, 8, 9]. Un travail récent a mis à jour le rôle important joué par un tenseur symétrique qui jouerait dans ce cadre de l'analogue de la courbure de Ricci pour la courbure scalaire [4]. Il faudrait donc étendre ces études en présence de singularités coniques.

RÉFÉRENCES

[1] K. Akutagawa ; B. Botvinnik : Yamabe metrics on cylindrical manifolds. *GAFA* **13** (2003), 259–333.

[2] K. Akutagawa ; G Carron ; R. Mazzeo : The Yamabe problem on stratified spaces. *GAFA* **24** (2014) No 4, 1039–1079.

[3] R. Avalos ; P. Laurain ; J-H. Lira : A positive energy theorem for fourth-order gravity. *Calc. Var. Partial Differ. Equ.* **61** (2022), No. 2, 33 p.

[4] R. Avalos ; P. Laurain ; N. Marque : Rigidity Theorems for Asymptotically Euclidean **Q**-singular Spaces. arXiv :2204.03607 (2022).

[5] G. Carron : Geometric inequalities for manifolds with Ricci curvature in the Kato class, *Ann. Inst. Fourier* **69** (2019),No 7, 3095–3167.

[6] M. Gursky : Compactness of conformal metrics with integral bounds on curvature. *Duke Math. J.* **72** (1993), 339–367.

[7] M. Gursky ; F. Hang ; Y-J. Lin : Riemannian manifolds with positive Yamabe invariant and Paneitz operator. *Int. Math. Res. Not.* (2016), No. 5, 1348–1367.

[8] M. Gursky, A. Malchiodi : A strong maximum principle for the Paneitz operator and a non-local flow for the **Q**-curvature. *J. Eur. Math. Soc.* **17** (2015) no 9, 2137–2173.

[9] F. Hang ; P. Yang : Q-curvature on a class of manifolds with dimension at least 5. *Commun. Pure Appl. Math.* **69** (2016), No. 8, 1452-1491.

[10] E. Humbert ; S. Raulot : Positive mass theorem for the Paneitz-Branson operator. *Calc. Var. Partial Differential Equations* **36** (2009) No 4, 525-–531.