COLLEGE DOCTORAL BRETAGNE — MATHSTIC BRETAGNE OCEANE

Fiche sujet pour le recrutement d'un contrat doctoral 2023

Il est impératif que cette fiche ne dépasse pas 5 PAGES

Titre du sujet : Applications biharmoniques du tore dans la sphère et énergie de Cosserat sur les variétés riemanniennes

Financement demandé : CDE
Indiquer l'origine du cofinancement (s'il y a lieu) :
et en fournir une preuve avant le 24 mai 2023 : michele.kerleroux@univ-brest.fr (UBO), noluenn.chauvin@univ-ubs.fr (UBS)

	Directeur de thèse HdR obligatoire	**Co-directeur** (s'il y a lieu) HdR obligatoire	**Co-encadrant** (s'il y a lieu) HdR non-obligatoire
NOM, Prénom	E. Loubeau		
Email	loubeau@univ-brest.fr		
Tél.	02 98 01 73 82		
Titre	MCF		
Laboratoire Equipe interne	LMBA Géométrie et Topologie		
Section CNU/CNRS	Section 25		
HDR[1]	Oui		
Noms des doctorants actuellement encadrés (date de 1ère inscription et date estimée de soutenance). Préciser le % de direction[2].	N/A		

[1] L'HdR doit être effective à la date d'audition.
[2] Soit 50% ou 100%.

Titre	Applications biharmoniques du tore dans la sphère et énergie de Cosserat sur les variétés riemanniennes
Contexte	Les applications et sous-variétés biharmoniques sont un des sujets de recherche les plus dynamiques de la Géométrie Différentielle. Le sujet de cette thèse sera 1) l'étude de l'existence d'une application biharmonique de degré un allant du 2-tore dans la 2-sphère et 2) la construction d'une nouvelle fonctionnelle d'énergie entre variétés riemanniennes basée sur l'énergie de Cosserat. 1) Eells et Wood ayant montré en 1976 qu'il ne peut pas y avoir de représentant harmonique dans cette classe d'homotopie, cette question reste en suspens et est une des plus fondamentales de la théorie des applications biharmoniques. Ce problème est sans doute assez difficile et impliquera certainement une dose assez importante d'Analyse mais cette question joue un rôle central dans la théorie. 2) L'objectif de la deuxième partie est de construire et d'étudier une version relativiste du modèle de l'élasticité de Cosserat, adaptée à la géométrie (semi-)riemannienne. Cette fonctionnelle devra fournir un modèle des relations entre les comportements plastique et élastique (stress-strain) des solides admettant un certain degré de liberté angulaire interne, où chaque particule se comporte comme un corps rigide sous des conditions de tension inhomogènes. Ces travaux confinent aux Mathématiques Appliquées et auront des interactions avec la Physique et l'Ingénierie.
Objectifs identifiés	Les objectifs principaux sont: - Montrer ou infirmer l'existence d'une application biharmonique de degré 1 entre le 2-tore et la 2-sphère. - Construire une version (semi)-riemannienne de la fonctionnelle de Cosserat. - Étudier l'existence des points critiques de cette fonctionnelle. - Examiner les propriétés de stabilité des points critiques. - Construire des exemples de points critiques.
Caractère novateur	La première partie sur l'existence d'applications biharmoniques de degré un d'un tore à valeurs dans une sphère est une des plus importantes questions de la théorie et tout progrès dans cette direction aura des retombées immédiates. La construction d'une énergie de Cosserat sur les espaces courbes aura des conséquences en Relativité Générale car elle permettra une meilleure modélisation des comportements plastique/élastique dans un contexte relativiste.

3 publications du (des) porteur(s) de projet dans le domaine sur les 5 dernières années	i. S. Dwivedi, E. Loubeau & H. Sá Earp, Harmonic flow of $Spin(7)$-structures, à paraître dans Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, en 2023. ii. E. Loubeau, A. Moreno, H. Sá Earp & Julieth Saavedra, Harmonic Sp(2)-invariant G_2-structures on the 7-sphere, Journal of Geometric Analysis 32 (2022). iii. H. Bibi, E.Loubeau, C.Oniciuc, Unique continuation property for biharmonic hypersurfaces in spheres, AGAG 60 (2021).
Collaborations nationales et internationales	Collaboration avec V. Branding (Vienne, Autriche) sur les aspects plus analytiques du sujet de la thèse. Il s'agit d'une nouvelle collaboration pour laquelle nous avons postulé à un projet PHC Amadeus.
Retombées	Publication d'articles dans des revues internationales avec comité de lecture, présentations dans des conférences internationales.

Title	Biharmonic maps from the torus to the sphere and the Cosserat energy between Riemannian manifolds
Context	Biharmonic maps and submanifolds are one of the most dynamic subjects in Differential Geometry The subject of this thesis will be 1) the study of the existence of biharmonic maps of degree one from the 2-torus to the 2-sphere and 2) the construction of a new energy functional between Riemannian manifolds based on the classical Cosserat energy. 1) Eells and Wood showed in 1976 that there cannot be any harmonic map in this homotopy class, but this remains open for biharmonic maps and is one of the fundamental questions of the theory. This difficult problem will probably involve a good dose of Analysis but it is key. 2) The second part will be to construct and study a relativistic version of Cosserat's model for elasticity, adapted to (semi)-Riemannian geometry.

	This functional will have to model relationships between stress and strain behaviour of solids with a certain degree of freedom, with each particle acting as a rigid body under inhomogeneous tension. This work will be closely related to Applied Mathematics, Physics and Engineering.
Objectives	The main objectives will be: - Prove or disprove the existence of a degree-one biharmonic map from the 2-torus to the 2-sphere. - Construct a (semi)-Riemannian version of the Cosserat functional. - Study its critical points. - Look at the stability properties of these critical points. - Construct examples of critical points.
Novelty of the project	The first part on the existence of a degree-one biharmonic map from the 2-torus to the 2-sphere is one of the main open problem in the theory and any progress in this direction will have immediate consequences. The construction of a Cosserat energy on curved spaces will impact work in General Relativity as it will enable a better modelling of stress/strain behaviour in a relativistic context.
International collaboration	This thesis coincides with a new collaboration project with V. Branding (Vienna University, Austria) on the more analytical aspects of the thesis. For this new cooperation, we have applied to a PHC Amadeus project.
Expectations	Publication of research articles in peer-reviewed international journals and presentations of work in international conferences.