Proposition de sujet de thèse

E. Loubeau (LMBA)

16 janvier 2023

Titre: Applications biharmoniques du tore dans la sphère et énergie de Cosserat sur les variétés riemanniennes

Ce sujet de thèse se situe dans le domaine du Calcul des Variations et de l'Analyse Géométrique.

La Relativité Générale, en tant que théorie de la Physique basée sur la géométrie, a inspiré de très nombreux travaux sur les fonctionnelles définies sur les applications entre variétés (semi)-riemanniennes.

Ce point de vue a permis la construction de multiples énergies, depuis la généralisation naturelle des géodésiques que sont les applications harmoniques, très prisées des géomètres car détectant les propriétés de la courbure, jusqu'aux fonctionnelles les plus sophistiquées d'ordres supérieurs telle la bi-énergie, largement étudiée ces dernières décennies.

Bien que de nombreux résultats, tant de nature analytique que géométrique, aient été obtenus dans des situations diverses, certaines questions fondamentales restent ouvertes.

Un aspect particulièrement important est l'influence de la topologie sur l'existence et les propriétés des applications biharmoniques, par exemple sur leur stabilité ou le problème crucial de l'existence d'un représentant biharmonique dans la classe d'homotopie de degré 1 des applications entre le tore et la sphère de dimension deux.

Eells et Wood ayant montré en 1976 qu'il ne peut pas y avoir de représentant harmonique dans cette classe d'homotopie, cette question reste en suspens et est une des plus fondamentales de la théorie des applications biharmoniques.

La première partie de ce sujet de thèse propose de s'attaquer à ce problème.

Il s'avérera sans doute assez difficile et impliquera certainement une dose assez importante d'Analyse mais cette question joue un rôle central dans la théorie des applications biharmoniques.

La stratégie serait d'élargir dans un premier temps le problème aux applications entre tores et sphères de dimensions quelconques, afin d'atténuer la contrainte sur la dimension tout en gardant intactes les topologies des espaces.

Ceci devrait nous permettre d'obtenir nos premiers résultats et de bénéficier d'une expérience et du recul nécéssaire pour comprendre le cas le plus important, celui des surfaces.

Questions:

- Construire des applications de degrés topologiques divers d'un tore dans une sphère.
- Trouver, en toute dimension, des exemples d'applications bi-harmoniques mais pas harmoniques d'un tore dans une sphère.
- Controler le degré des constructions obtenues.
- Résoudre la question pour les surfaces.

La deuxième partie du projet est de construire et d'étudier une version relativiste du modèle de l'élasticité de Cosserat, adaptée à la géométrie (semi-)riemannienne.

Cette fonctionnelle devra fournir un modèle des relations entre les comportements plastique et élastique (stress-strain) des solides admettant un certain degré de liberté angulaire interne, où chaque particule se comporte comme un corps rigide sous des conditions de tension non-homogènes.

Cette théorie non-locale a été développée en Physique de la Matière Condensée au début des années 1900 mais trouve un second souffle vers la fin du vingtième siècle avec la théorie de l'élasticité micropolaire (voir les ouvrages de Eringen et Neff).

Bien que plusieurs travaux aient étudié les propriétés géométriques et analytiques de la fonctionnelle de Cosserat sur des domaines euclidiens, il reste à construire un modèle sur les variétés riemanniennes générales et en déduire ses propriétés principales.

La fonctionnelle énergie pour l'élasticité de Cosserat ainsi définie pour des applications entre variétés devra combiner l'énergie des applications p-harmoniques et un terme complémentaire, qui reste à déterminer. Ceci constitura une nouvelle généralisation des applications harmoniques.

Les objectifs principaux sont:

- Construire une version (semi-)riemannienne de la fonctionnelle de Cosserat.
- Etudier l'existence des point critiques de cette fonctionnelle.
- Examiner les propriétés de stabilité des points critiques.
- Construire des exemples de points critiques.
- Dériver une formule de monotonie à travers le tenseur énergie-impulsion.

Ces travaux confinent aux Mathématiques Appliquées et auront des interactions avec la Physique et l'Ingénierie.

Ce projet de thèse est en co-direction avec V. Branding de l'Université de Vienne (Autriche).