Sujet de thèse proposé par Bertrand Patureau Mirand :
TQFTs non semi-simple du centre de Drinfeld-Joyal-Street.

Mots clés : 3–variétés, 2+1-TQFT, catégories tensorielles non semi-simples, topologie quantique.

La théorie des catégories monoidales est intimement reliée à la topologie. Les premières évidences dans ce sens sont apparues dans les années 80, lorsque Jones ([5]) définit un invariant des entrelacs dans $\mathbb{R}^3$ qui est un polynôme de Laurent. Peu après, Witten ([11]) interprète physiquement le polynôme de Jones évalué aux racines de l'unité comme une théorie quantique de champs topologiques (TQFT) associée au groupe de Lie $SU(2)$ et prédit son extension pour des entrelacs dans des 3-variétés fermées. En utilisant la catégorie des représentations du groupe quantique (cf [4]) de Drinfel'd-Jimbo $U_q\mathfrak{sl}_2$ aux racines de l'unité, Reshetikhin et Turaev donnent dans [8] une construction précise de cet invariant qui est le cœur d'une 2+1-TQFT. Cette construction a été généralisée de manière systématique par deux constructions fondamentales : L'invariant de Witten-Reshetikhin-Turaev (WRT [8]) utilise la chirurgie dans les 3-variétés pour définir une TQFT à partir d'une catégorie modulaire (une catégorie tensorielle tressée et semi-simple) ; La construction de Turaev-Viro (TVBW [10, 1]) utilise des sommes d'états sur les décompositions cellulaires des 3-variétés pour élaborer une TQFT à partir d'une catégorie de fusion sphérique (une catégorie tensorielle semi-simple). Il a été conjecturé longtemps et prouvé récemment [9] que la TQFT de type (WRT) associée au centre de Drinfeld-Joyal-Street d'une catégorie de fusion sphérique coincide avec la TQFT de type (TVBW) de cette catégorie.

Les deux constructions reposent sur la semi-simplicité de la catégorie tensorielle utilisée. En 1995, Lyubashenko [7] définit un invariant de 3-variétés à partir de catégories modulaires non semi-simple. Cet invariant a été étendu en une TQFT en 2021 [3]. Une version non semi-simple d'invariant associé à une catégorie sphérique non semi-simple a aussi été définie dans [2] en 2019 et produit aussi une TQFT. Il est naturel de conjecturer l'existence d'une relation similaire à celle du cas semi-simple entre ces deux TQFTs. L'objectif de la thèse est de prospecter dans cette voie en commençant par comparer les invariants de 3-variétés.

Références

[1] Barrett, J. W. & Westbury, B. W. - *Invariants of piecewise-linear 3-manifolds* Trans. Amer. Math. Soc., 1996, 348, 3997–4022

[2] Costantino, F. ; Geer, N. ; Patureau-Mirand, B. & Turaev, V. - *Kuperberg and Turaev-Viro invariants in unimodular categories* Pacific J. Math., 2020, 306, 421-450.

[3] De Renzi, M. ; Gainutdinov, A. M. ; Geer, N. ; Patureau-Mirand, B. & Runkel, I. - *3-Dimensional TQFTs from non-semisimple modular categories* Selecta Math. (N.S.), 2022, 28. Paper No. 42, 60

[4] V.G. Drinfel'd - *Quantum groups.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986), 798–820, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[5] V. Jones - *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 12 (1985), no. 1, 103–111.

[6] Joyal, A., Street, R. - *The geometry of tensor calculus I*, Adv. in Math. 88 (1991), 55–112.

[7] Lyubashenko, V. V. - *Invariants of 3-manifolds and projective representations of mapping class groups via quantum groups at roots of unity* Comm. Math. Phys., 1995, 172, 467–516.

[8] N. Reshetikhin, V. Turaev - *Invariants of* 3*-manifolds via link polynomials and quantum groups.* Invent. Math. 103 (1991), no. 3, 547–597.

[9] Turaev, V. & Virelizier, A. - *Monoidal categories and topological field theory* Birkhäuser/Springer, Cham, 2017, 322, xii+523.

[10] V.G. Turaev, O. Viro - *State sum invariants of* 3*-manifolds and quantum 6j-symbols.* Topology 31 (1992), no. 4, 865–902.

[11] E. Witten - *Quantum field theory and the Jones polynomial.* Comm. Math. Phys., 121, vol.3, (1989), 351-399.

à Vannes, le 31/01/2023

Bertrand Patureau Mirand.