

Contrôlabilité de l'équation de l'élastohydrodynamique d'un micro-robot magnétique souple

Contexte. Ce projet de doctorat en mathématiques appliquées aborde des questions d'automatique, en particulier la contrôlabilité et la stabilisation, à la fois en dimension finie et infinie, ainsi que le lien entre les deux. Les systèmes dynamiques pris en considération modélisent la dynamique d'un filament élastique dans un fluide visqueux, tourné vers les applications à la micro-robotique médicale et à la locomotion bio-inspirée.

La recherche sur la fabrication et l'utilisation médicale prometteuse de robots microscopiques s'est développée rapidement au cours des dernières décennies [7], nécessitant des modèles avancés pour les problèmes complexes d'interaction fluide-structure impliqués et des études précises sur leur guidage. En particulier, le guidage par un champ magnétique externe de robots flexibles inspirés des flagelles biologiques constitue un défi important.

Si l'on ajoute à ces systèmes un terme rendant compte d'un champ magnétique prescrit (ou, à cette fin, de toute autre forme de contrôle sur la dynamique du filament), on peut les considérer comme des systèmes de contrôle, qui peuvent à leur tour être étudiés du point de vue de la théorie mathématique du contrôle. En particulier, on peut se demander si le système est *contrôlable* (l'existence formelle de contrôles qui permettent de diriger le système vers n'importe quelle cible autour d'un état d'équilibre) ou *stabilisable* (la capacité d'affecter les propriétés de stabilité des équilibres), ces deux propriétés étant cruciales pour informer de la capacité d'un système à être efficace dans diverses applications.

Pour modéliser l'élastohydrodynamique des filaments à l'échelle microscopique, on peut choisir entre deux catégories de modèles : une formulation continue pour le matériau élastique, produisant une équation différentielle partielle (EDP) non linéaire, ou une formulation discrète basée sur une description mécanique du filament par des liens rigides, le système d'équations qui en résulte étant une équation différentielle ordinaire (EDO) ; voir la figure 1.

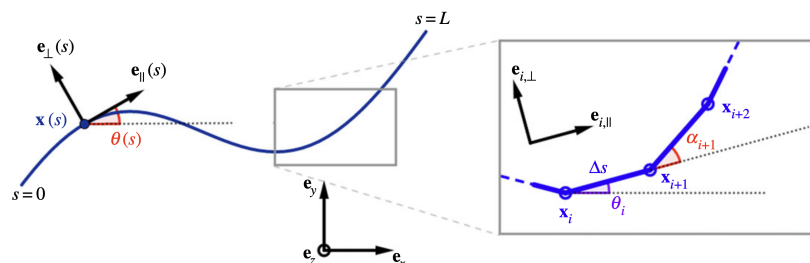


Figure 1: Modèles continus et discrets d'un filament élastique.

Par conséquent, l'équivalence (ou l'absence d'équivalence) des propriétés de contrôlabilité et de stabilisation pour les modèles élastohydrodynamiques ODE et PDE constitue une question importante dans le domaine, et sa généralisation à des classes plus larges de systèmes de contrôle représente une direction de recherche de premier plan pour la théorie du contrôle.

L'objectif principal de ce projet est d'établir des résultats d'équivalence entre les propriétés de contrôle pour les modèles à dimensions finies et infinies. Cet objectif à long terme est sous-tendu par plusieurs questions concernant les modèles ODE et PDE séparément, définissant des étapes intermédiaires.

État de l'art. Il existe un grand nombre d'études sur le contrôle des micro-nageurs dans la littérature, dont beaucoup se concentrent sur les nageurs filiformes inspirés par le modèle de Purcell [5]. Cependant, la plupart d'entre elles considèrent le contrôle direct de la forme, ce qui est relativement irréaliste

d'un point de vue robotique. Des résultats théoriques cohérents sur la contrôlabilité de modèles plus réalistes constituent un défi important pour le domaine. En particulier, le cas du contrôle magnétique est, de loin, moins bien compris.

En ce qui concerne le modèle de dimension finie, des résultats de contrôlabilité ont été obtenus ces dernières années, mais une étude complète des équilibres non triviaux en fonction du nombre de liens et de magnétisations fait toujours défaut. En outre, le modèle continu avec magnétisme constitue un territoire inexploré du point de vue de la théorie du contrôle, avec des découvertes prometteuses à faire sur ses propriétés et son comportement en utilisant une combinaison de l'analyse des EDP, des techniques de contrôle non linéaire et de la simulation numérique, comme expliqué ci-dessous.

L'idée de lier les propriétés de contrôlabilité et de stabilisabilité de modèles infinis et d'une version finie (typiquement, une discrétisation spatiale) a été étudiée pour la première fois dans [3, 2]. En effet, la méthode proposée dans ces articles consiste à adapter les schémas numériques classiques (éléments finis, différences finies, etc...) de sorte que les propriétés de contrôle, telles que l'observabilité ou la contrôlabilité, soient préservées.

Objectifs et méthodes.

Modèle de dimension finie : Le "N-link swimmer"

- Modélisation et étude du système dynamique et de ses équilibres, en fonction des magnétisations : stabilité, bifurcations.
- Contrôlabilité (condition de Sussmann, etc.)
- (long terme) Optimisation de la distribution magnétique pour différents objectifs ; formalisation du problème et choix d'un cadre d'optimisation adapté.
- (Long terme) Proposition d'une version 3D, éventuellement basée sur les poutres de Cosserat.

Modèle de dimension infinie : "Magnéto-élasto-hydrodynamique"

- Dérivation formelle du modèle avec un terme magnétique.
- Recherche bibliographique pour classer et rationaliser les hypothèses de modélisation pour l'hydrodynamique, l'élasticité et le magnétisme.
- Contrôlabilité du système en boucle ouverte à l'équilibre avec la méthode de retour [1].
- Etude du système en boucle fermée, linéarisation à l'équilibre.
- Conception d'un code numérique pour soutenir l'analyse théorique.

Contrôle de l'EDO et de l'EDP

- Définir les notions d'équivalence entre les modèles à dimension finie et infinie, en s'appuyant sur les travaux récents de Mori et Ohm [6] et Levillain et al. (en préparation) [?] Établir sous quelles conditions le modèle PDE peut être remplacé par sa version discrétisée à des fins de contrôlabilité.

Résultats attendus. Les résultats, répartis en contributions théoriques sur les systèmes de contrôle et en résultats explicites sur le système micro-organisme/micro-robot, seront de nature à intéresser les communautés des mathématiques appliquées, de l'automatique et de la physique de la micro-locomotion. Plusieurs articles dans des revues de premier plan ou actes de conférence adaptés à chaque domaine seront donc envisageables.

Programme prévisionnel

	Année 1		Année 2		Année 3	
	S1	S2	S1	S2	S1	S2
Study of the ODE model	[Thick black bar]					
Study of the non-trivial equilibria	[Bar]					
Controllability and stability	[Bar]					
Study of the PDE model	[Thick black bar]					
Modelling	[Bar]					
Controllability (open-loop)	[Bar]					
Stabilisation (closed-loop)			[Bar]			
Convergence and equivalence between models	[Thick black bar]					
Analysis and formalisation			[Bar]			
Convergence result			[Bar]			
Support and development	[Thick black bar]					
Bibliography	[Bar]					
Numerical implementation	[Bar]					
Model optimisation			[Bar]			

Environnement de travail. La thèse sera co-encadrée par Franck Plestan (Professeur, LS2N), Swann Marx (CR CNRS, LS2N) and Clément Moreau (CR CNRS, LS2N). Le doctorant sera accueilli par l'équipe CODEX au sein du laboratoire LS2N, situé à l'Ecole Centrale de Nantes. Date de début : septembre 2024.

Compétences requises. Les candidats doivent être titulaires d'une maîtrise en mathématiques appliquées ou d'un diplôme équivalent, avec une solide connaissance des équations différentielles partielles et de la modélisation mathématique. Des compétences de base en programmation sont requises. Une expérience plus développée en simulation numérique sera appréciée.

En outre, des connaissances dans un ou plusieurs des domaines suivants sont appréciées :

- Théorie du contrôle en dimension finie et infinie
- Mécanique des fluides, physique de la matière condensée

References

- [1] Coron, J. M. (2007). Control and nonlinearity (No. 136). American Mathematical Soc.
- [2] S. Ervedoza, S. (2010). Observability properties of a semi-discrete 1D wave equation derived from a mixed finite element method on nonuniform meshes. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*. 16(2), 298–326.
- [3] Ervedoza, S., Zheng, C., & Zuazua, E. (2008). On the observability of time-discrete conservative linear systems. *Journal of functional Analysis*, 254(12), 3037–3078.
- [4] Moreau, C. (2019). Local controllability of a magnetized Purcell's swimmer. *IEEE Control Systems Letters*, 3(3), 637-642.
- [5] Moreau, C. (2023). Controllability and Optimal Control of Microswimmers: Theory and Applications. *Journal of the Physical Society of Japan*, 92(12), 121005.
- [6] Mori, Y., & Ohm, L. (2023). Well-posedness and applications of classical elasto-hydrodynamics for a swimming filament. *Nonlinearity*, 36(3), 1799.
- [7] Zhou, H., Mayorga-Martinez, C. C., Pané, S., Zhang, L., & Pumera, M. (2021). Magnetically driven micro and nanorobots. *Chemical Reviews*, 121(8), 4999-5041.